Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek

Előfordulhat, hogy olyan egyenletet, egyenlőtlenséget vagy egyenletrendszert kell megoldanunk, amely (pl.: betűjelű) paramétert tartalmaz. A tetszőleges jelölésű paraméterre az ilyen esetekben úgy tekintünk, mint az „” változótól független konstansra és ellentett műveletek végezve olyan átalakításokat végzünk, amellyel rendezzük/kifejezzük -et. Ekkor tulajdonképpen mondhatjuk azt is, hogy az megoldást a paraméter függvényeként adtuk meg. Legegyszerűbb példa erre a síkbeli koordinátageometria témakörben az egyenes paraméteres egyenlete.

Ekkor pl. az egyenes úgy értendő, hogy valós paraméter értékekkel származtatjuk az egyenesre illeszkedő pontokat. Pl. a értékhez így

Elsőfokú paraméteres egyenletek:

1.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenletet!

Zárójelbontás:

Rendezzük egy oldalra a változót tartalmazó tagokat, minden egyéb kerüljön a túloldalra:

Közvetlen kiemeléssel alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

Leosztjuk a paramétert tartalmazó taggal, amely ha nevezőbe kerül, akkor a tört értelmezése szerint nem lehet nulla értékű, tehát: feltételből adódik: így

Tehát, az értéken kívül minden valós paraméterérték helyettesíthető, ebből kapjuk az egyenlet valós megoldását.

Megjegyzések:

1-Előfordulhat, hogy a feladat szövege az egész számok halmazán kéri az egyenlet megoldását. Az ilyen esetben a kapott törtes alakú megoldást átalakítjuk, mégpedig „mezítláb végzett” parciális törtekre bontással.

Ehhez, a nevezőben lévő kifejezés konstans szorosát „csempésszük be” a számlálóba, mégpedig annyiszorosát, amennyi a számlálóban az „” paraméter előtti szorzó, esetünkben:

Ezen átalakítások után felhasználjuk, hogy „”-re kizárólag akkor kaphatunk egész értéket, ha a tört is egész értékű. Ez akkor következik be, ha a nevezőben lévő kifejezés osztója a számlálóban lévő -nek. Esetvizsgálat:

1.eset: ebből: tehát: vagyis:

2.eset: ebből: tehát: vagyis:

3.eset: ebből: tehát: vagyis:

4.eset: ebből: tehát: vagyis:

5.eset: ebből: tehát: vagyis:

6.eset: ebből: tehát: vagyis:

2-A feladat szövege még annyiban pontosíthat, hogy vagy a paraméter vagy a változó lehetséges egész megoldásait „szorítja meg” egy pozitív feltétellel.

Abban az esetben, ha a paraméter előjelére vonatkozik a pozitív feltétel, akkor a megoldás elején alapvető kezdeti feltétel lesz: és az előző lehetséges megoldás közül választjuk ki a kedvezőket, ezek:

1.eset: ebből: tehát: vagyis:

2.eset: ebből: tehát: vagyis:

3.eset: ebből: tehát: vagyis:

5.eset: ebből: tehát: vagyis:

Abban az esetben, ha a változó előjelére vonatkozik a pozitív feltétel, akkor a megoldás elején az alapvető kezdeti feltétel megmarad: és az előző lehetséges megoldás közül választjuk ki a kedvezőket, ez:

1.eset: ebből: tehát: vagyis:

Figyelem: a 3.eset: ebből: tehát: vagyis: csak akkor számít, ha a feladat szövege a nemnegatív megengedő feltételt mondja, mert az szám nem pozitív (és nem negatív).

3-Abban az esetben, ha a feladat szövegében nincs megjelölt számhalmaz (akkor a valós számok halmazán kéri a megoldásokat), és ehhez teszi hozzá a kapott megoldás pozitív vagy negatív vagy nemnegatív vagy nempozitív legyen.

Legyen például a nempozitív feltétel, ekkor a

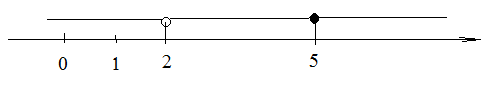
paraméteres egyenletet rendezzük -re:

majd egyenlőtlenséget oldunk meg a jobb oldali törtes mennyiségre vonatkozóan:

A nevezőjében változót tartalmazó törtes egyenlőtlenségek megoldásakor táblázatos módszert alkalmazunk:

Zérushelyek: ebből illetve ebből

Számegyenes:



Táblázat:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

A kérdezett reláció értelmében a megoldás: abban az esetben lesz a kitűzött paraméteres egyenletben az változó nempozitív előjelű, ha vagy

4-Természetesen egyéb megszorító feltételeket is megadhat a feladat.

Ha például azt kérdezi, hogy negatív előjelű paraméter értékek esetén a megoldás milyen előjelű:

Az előző táblázatból kiolvasható, hogy az értékek esetén a tört negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű.

Ha például azt kérdezi, hogy pozitív előjelű paraméter értékek esetén a megoldás milyen előjelű:

Az előző táblázatból kiolvasható, hogy az értékek esetén a tört a tartományon negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű; a tartományon pozitív előjelű, így a megoldás is pozitív előjelű; és az tartományon a tört negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű.

Ha például azt kérdezi, hogy az értékek esetén a megoldás milyen előjelű, akkor a táblázat alapján mondhatjuk:

tartományon negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű; a tartományon pozitív előjelű, így a megoldás is pozitív előjelű.

Ha például azt kérdezi, hogy az értékek esetén a megoldás milyen előjelű, akkor a táblázat alapján mondhatjuk:

tartományon pozitív előjelű, így a megoldás is pozitív előjelű; az tartományon negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű.

Ha például azt kérdezi, hogy az tartományon milyen előjelű a megoldás, akkor a táblázat alapján mondhatjuk:

tartományon negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű; a tartományon pozitív előjelű, így a megoldás is pozitív előjelű; és az tartományon a tört negatív előjelű, így a megoldás is negatív előjelű.

5-Végül az is előfordulhat, hogy a feladat szövege konkrét értékekre kérdez rá. Ebből alaptípus létezik.

a)Konkrét paraméterértékhez tartozó változó érték meghatározása:

Határozza meg az paraméterértékhez tartozó megoldást! Ekkor akár átalakítások nélkül helyettesíthetünk az eredeti egyenletbe is és helyettesítési értéket számolunk vagy helyettesíthetünk az -re rendezett alakba is:

b)konkrét változó értékhez tartozó paraméterérték meghatározása:

Határozza meg az megoldáshoz tartozó paraméterértéket! Ekkor akár átalakítások nélkül is helyettesíthetünk az eredeti egyenletbe és helyettesítési értéket számolunk vagy helyettesíthetünk az -re rendezett alakba is:

Előfordulhat, hogy a paramétert tartalmazó egyenletben valamilyen nevezetes azonosságot és/vagy megoldó képletet kell felhasználnunk a lehető legegyszerűbb alak megadásához.

2.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenletet!

a)

Leosztjuk a paramétert tartalmazó taggal, amely ha nevezőbe kerül, akkor a tört értelmezése szerint nem lehet nulla értékű, tehát: feltételből adódik: így

Vegyük észre, hogy a számlálóban két négyzetes tag különbsége szerepel, amely az ugyanazon két tag összegének és különbségének szorzataként szorzattá alakítható, ha a kettes kitevők nélkül vesszük a hatványalapot összegét, különbségét és azokat összeszorozzuk:

Ezután egyszerűsítve adódik a megoldás:

b)

Leosztjuk a paramétert tartalmazó taggal, amely ha nevezőbe kerül, akkor a tört értelmezése szerint nem lehet nulla értékű, tehát: feltételből adódik: így

Vegyük észre, hogy a számlálóban lévő másodfokú kifejezésre alkalmazható a megoldó képlet, a nevezőben két négyzetes tag különbsége szerepel, amelyek szorzattá alakíthatók és ezután egyszerűsíthető:

c)

Leosztjuk a paramétert tartalmazó taggal, amely ha nevezőbe kerül, akkor a tört értelmezése szerint nem lehet nulla értékű, tehát: feltételből adódik: így

Vegyük észre, hogy a számlálóban lévő másodfokú kifejezésre alkalmazható a megoldó képlet, a nevezőben két négyzetes tag különbsége szerepel, amelyek szorzattá alakíthatók és ezután egyszerűsíthető:

d)

Leosztjuk a paramétert tartalmazó taggal, amely ha nevezőbe kerül, akkor a tört értelmezése szerint nem lehet nulla értékű, tehát: feltételből adódik: így

Vegyük észre, hogy a számlálóban két köbös tag összege, a nevezőben két négyzetes tag különbsége szerepel, amelyek szorzattá alakíthatók és ezután egyszerűsíthető:

Az így kapott törtes alakú megoldás esetén előbb a nevező „”-szeresét csempésszük be a számlálóba, majd a konstans szorosát:

Az is előfordulhat, hogy a megoldandó paraméteres egyenlet eleve törtes alakú, ilyenkor a tört értelmezés szerinti nem nulla alaphalmaz feltételvizsgálattal kezdünk; az egyes feladatok esetén nézzünk speciális kérdéseket.

3.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenletet!

a)Milyen paraméterérték esetén lesz a kapott megoldás nemnegatív?

Alaphalmaz vizsgálat: és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

A feladat szövegében megadott feltétel módosítandó az egyenlőtlenség adja, ebből .

b)Mi az egyenlet megoldása paraméterérték esetén?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, adódik:

Mivel a kapott megoldás független az paramétertől, így paraméterérték esetén is .

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

c)Melyik az az paraméterérték, amikor az egyenlet megoldása ?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből tehát és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

A tört akkor nulla, ha a számlálója nulla, így ebből

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

d)Határozza meg az paraméterértékhez tartozó megoldást!

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és és

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Helyettesítsünk értékkel, ekkor

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

e)Melyek azok a valós paraméterértékek, amelyre az egyenletnek pozitív megoldása lesz?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Az átalakítások után látható, hogy abban az esetben kaphatunk pozitív megoldást , ha ebből

Zérushelyek:

Táblázat:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

A táblázat alapján láthatjuk, hogy az egyenletnek akkor lesz pozitív megoldása, ha vagy

f)Van-e megoldása az egyenletnek?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Alakítsuk át a bal oldali törtek nevezőit:

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, adódik:

Amely kizárható, mert az alaphalmaz vizsgálatnál feltettük, hogy ez nem következhet be.

g)Adja meg az egyenlet pozitív egész megoldásait!

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből innen és és amelyből innen és

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből innen adódik:

Az átalakítások után kapott összeg akkor lehet egész, ha osztója -nek. Ezek közül a megoldás akkor lehet pozitív, ha pozitív, így

1.eset: amelyből így megfelelő

2.eset: amelyből így megfelelő

3.eset: amelyből így megfelelő

4.eset: amelyből így megfelelő

Megjegyzés: a kapott megoldás alapján látható, hogy a feladatnak nincs negatív egész megoldása.

h)Határozza meg azon paraméterértékeket, amelyekre a megoldás feltételt teljesíti!

Alaphalmaz vizsgálat: és amelyből és és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből és amelyből adódik:

A kapott megoldás esetén vizsgáljuk a feladat szövegének feltételét:

i)Mennyi az megoldáshoz tartozó paraméterérték?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és

amelyből innen tehát

ebből feltétellel

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, adódik:

Helyettesítsünk:

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

j)Az paraméter mely értékeire lesz az egyenlet gyöke kisebb, mint ? Mekkora az értéke, ha ?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

A feladat szövegének első kérdésére a megoldandó egyenlőtlenség:

Zérushelyek: ebből valamint

Táblázat:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

A kérdezett reláció alapján, a megoldandó egyenlet gyöke akkor lesz kisebb, mint , ha vagy teljesül. A második kérdésre adandó válasz megadásához helyettesítsünk:

Együtthatók:

Ennek megoldásai: illetve

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

k)Milyen előjelű lesz az egyenlet megoldása, ha a paraméter negatív előjelű?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Térjünk rá a kérdés megválaszolására: Ha akkor az összeg előjelét a tört nevezőjében lévő különbség nagyságrendje dönti el. Az összeg pozitív mindaddig, amíg teljesül. ennek az egyenlőtlenségnek megoldása:

Zérushelyek:

Táblázat:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: vagy utóbbi nem lehetséges, mert feltettük:

Vagyis értékek esetén az eredeti egyenlet megoldása pozitív, valamint tartományba tartozó paraméterértékek esetén a megoldás negatív.

l)Milyen paraméterérték esetén lesz az egyenlet megoldása negatív?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és és és amelyből

Alakítsuk át a törtek nevezőit:

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására: vizsgálandó az feltétel.

Mivel a tört számlálójában egy négyzetes mennyiség pozitív konstansszorosa van, amely biztosan pozitív előjelű, így ez a tört akkor lehet negatív, ha a tört nevezője negatív:

m)Lehet-e megoldása az egyenletnek?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Amely kizárható, mert az alaphalmaz vizsgálatnál feltettük, hogy ez nem következhet be.

n)Határozza meg a paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet megoldása -nél nagyobb valós szám legyen!

Alaphalmaz vizsgálat: és amelyből innen

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására: az feltétel esetén

Mivel a tört számlálója pozitív, ezért a tört abban esetben lesz pozitív, ha a nevező is pozitív, tehát

Előfordulhat, hogy két különböző betűjelű paramétert is tartalmaz a megoldandó egyenlet.

4.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenletet!

a)

Alaphalmaz vizsgálat: és

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

b)

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

c)

Végezzünk alaphalmaz vizsgálatot: amelyből átalakítva

amelyből tehát innen és amelyből adódik

d)

Végezzünk alaphalmaz vizsgálatot: amelyből átalakítva innen amelyből és amelyből

e)

Alaphalmaz vizsgálat:

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

f)

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Az alaphalmaz vizsgálatot kiegészítve az feltétellel, amelyből adódik:

Elsőfokú paraméteres egyenlőtlenségek:

5.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenlőtlenséget!

a)

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

1.eset: tehát pozitív, ebből teljesül és a megoldandó egyenlőtlenség:

2.eset: tehát negatív, ebből teljesül és a megoldandó egyenlőtlenség:

b)

Alaphalmaz vizsgálat: és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

1.eset: tehát pozitív, ebből teljesül és a megoldandó egyenlőtlenség:

A bal oldali kéttényezős szorzat akkor lesz negatív előjelű, ha az egyes szorzótényezők különböző előjelűek, ez két lehetséges előjelkiosztást jelent, tehát esetvizsgálat:

1/A.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel a megoldás:

és

1/B.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel a megoldás:

és

2.eset: tehát negatív, ebből teljesül és a megoldandó egyenlőtlenség:

A bal oldali kéttényezős szorzat akkor lesz pozitív előjelű, ha a szorzótényezők megegyező előjelűek, ez két lehetséges előjelkiosztást jelent, tehát esetvizsgálat:

2/A.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel, azt a következtetést vonjuk le, hogy nincs megoldás, mert az és feltételek egymásnak ellent mondanak.

2/B.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel a megoldás:

és

c)

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

1.eset: tehát pozitív, ebből teljesül és a megoldandó egyenlőtlenség:

A bal oldali kéttényezős szorzat akkor lesz negatív előjelű, ha az egyes szorzótényezők különböző előjelűek, ez két lehetséges előjelkiosztást jelent, tehát esetvizsgálat:

1/A.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel a megoldás:

és

1/B.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel a megoldás:

és

2.eset: tehát negatív, ebből teljesül és a megoldandó egyenlőtlenség:

A bal oldali kéttényezős szorzat akkor lesz pozitív előjelű, ha a szorzótényezők megegyező előjelűek, ez két lehetséges előjelkiosztást jelent, tehát esetvizsgálat:

2/A.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel a megoldás:

és

2/B.eset: ebből és ebből ezt összevetve a kezdeti feltétellel, azt a következtetést vonjuk le, hogy nincs megoldás, mert az és feltételek egymásnak ellent mondanak.

Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek:

Az egyenletrendszerek megoldásánál ismertetett egyenlő együtthatók módszerével is megoldhatók, de leggyakrabban a behelyettesítő módszerrel lesz lehetőség a megoldás; valamint a determinánsok felhasználása is lehetséges. A cél minden esetben az lesz, hogy a változókat a paraméter(ek) függvényében adjuk meg, és vizsgáljuk az esetleges további feltételeknek eleget tevő paraméteres megoldásokat.

6.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenletrendszert!

a)---

Mivel az összefüggések bal oldalain az -es tagok konstans szorzói közvetlenül megegyeznek, ezért alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét: vonjuk ki például az -es egyenletből a -es egyenletet, ekkor:

Ha feltesszük, hogy ebből akkor adódik:

Az -es összefüggést bővítsük szorzótényezővel, hogy az -os tagok konstans szorzói közvetlenül megegyeznek:

Vonjuk ki például az -es egyenletből a -es egyenletet, ekkor:

Ha feltesszük, hogy ebből akkor adódik:

b)---

Mivel az összefüggések bal oldalain az -os tagok konstans szorzói csak előjelben különböznek, ezért alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét: adjuk össze az egyenleteket, ekkor:

Ha feltesszük, hogy ebből akkor adódik:

A -es összefüggést bővítsük szorzótényezővel, hogy az -es tagok konstans szorzói közvetlenül megegyeznek:

Vonjuk ki például az -es egyenletből a -es egyenletet, ekkor:

Ha feltesszük, hogy ebből akkor adódik:

c)---

Alkalmazzuk most a behelyettesítő módszert, fejezzük ki például az -es összefüggésből az változót, majd helyettesítsünk a -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy ez minden valós szám esetén teljesül, adódik:

Helyettesítsünk vissza az változóért:

d)---

Mivel az összefüggések bal oldalain az -os tagok konstans szorzói csak előjelben különböznek, ezért alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét: adjuk össze az egyenleteket, ekkor:

Ha feltesszük, hogy ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza például az -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy adódik:

e)Az paraméter előjelétől függően hogyan alakul az egyenletrendszer megoldásainak előjele?

Mivel az összefüggések bal oldalain az -os tagok konstans szorzói csak előjelben különböznek, ezért alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét: adjuk össze az egyenleteket, ekkor:

Ha feltesszük, hogy ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza például az -es összefüggésbe:

Vizsgáljuk az paraméter előjelétől függően a megoldás előjelét. Mivel a paraméter függvényeként felírt az változók nevezőiben lévő kifejezések zérushelyei , ezért ha akkor a törtek nevezői pozitív előjelűek, tehát az változó pozitív, az változó negatív előjelű. Az feltétel esetén esetvizsgálat szükséges, ugyanis az változóra vonatkozó megoldás nevezőjében a tartományon az függvény grafikonja a vízszintes tengely alatt van, tehát negatív előjelű (a felvett értékek halmaza ) , így annak reciproka is negatív (nagyságrendileg ) tehát az változó negatív előjelű. Az változóra vonatkozó megoldás nevezőjében a tartományon az függvény grafikonja a vízszintes tengely felett van, tehát pozitív előjelű, így a teljes tört negatív előjelű.

A másik lehetőség, ha ekkor az változóra vonatkozó megoldás nevezőjében az függvény grafikonja a vízszintes tengely felett van, tehát pozitív előjelű, így annak reciproka is pozitív, tehát az változó pozitív.

Az változóra vonatkozó megoldás nevezőjében a tartományon az függvény grafikonja a vízszintes tengely alatt van, tehát negatív előjelű, így a teljes tört pozitív előjelű, tehát az változó pozitív.

f)Hogyan alakul az egyenletrendszer megoldásainak nagyságrendje egymáshoz viszonyítva, ha az egyik paraméterérték a másiknak háromszorosa?

Adjuk össze, illetve vonjuk ki egymásból az egyenleteket:

Ha feltesszük, hogy adódik:

Ha feltesszük, hogy adódik:

Összeadva ezeket a következmény egyenleteket, adódik:

Vonjuk ki egymásból ezeket a következmény egyenleteket, adódik:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására: mivel a feladat szövege határozatlanul fogalmaz, hogy melyik paraméter amelyik a másiknak háromszorosa, ezért esetvizsgálat szükséges.

1.eset:

Tehát ebben az esetben az egyenletrendszer megoldása, kétszerese az -nak.

2.eset:

Tehát ebben az esetben az egyenletrendszer megoldása, mínusz kétszerese az -nak.

g)---

A megoldáshoz alkalmazzunk most determinánsokat:

Az eredeti együthatókból képzett determináns és annak értéke:

Az változóhoz tartozó determináns és annak értéke:

Tehát

Az változóhoz tartozó determináns és annak értéke:

Tehát

h)Milyen valós paraméterértékek esetén teljesül, az feltétel az egyenletrendszer megoldásaira?

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó meghatározásáért:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldásánál használjuk fel, hogy a számláló, egy változótól független pozitív konstans, így a tört akkor lehet pozitív, ha a nevező szintén pozitív, tehát:

i)Igaz-e, hogy az egyenletrendszer megoldásai egymás reciprokai?

Alaphalmaz feltétel vizsgálat a tört nevezői miatt: amelyből

Fejezzük ki például a -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó meghatározásáért:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására: a válasz egyértelmű nem, mert az paraméter felhasználásával felírt kifejezések nem egymás reciprokai.

j)Határozza meg a paraméterek felhasználásával a kifejezés értékét!

Alaphalmaz feltétel vizsgálat a tört nevezői miatt: amelyből és amelyből

Mivel az összefüggések bal oldalain megegyező számláló és megegyező nevezővel rendelkező törtek vannak, ezért vezessünk be segédváltozókat rájuk, legyen: . Ezek felhasználásával az egyenletrendszer átírható:

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például a betűjelű változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Helyettesítsünk vissza a betűjelű segédváltozó meghatározásáért:

Mivel ezek csak a segédváltozók értékei, ezért helyettesítsünk vissza

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására:

k)Határozza meg az paraméter értékeit, hogy az egyenletrendszer megoldásaira: teljesüljön!

Fejezzük ki például a -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy ebből ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó meghatározásáért:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására: az első feltétel

Zérsuhelyek:

Táblázat:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Az egyenlőtlenség megoldása, a kérdezett reláció: vagy

A második feltétel:

Az egyenlőtlenség megoldásakor, a kérdezett reláció meghatározásához használjuk ki, hogy a tört számlálója egy változótól független pozitív konstans, így a tört akkor lehet pozitív, ha a nevező is pozitív, tehát:

Zérushelyek:

Táblázat:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása:

Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó együttes feltételek tehát akkor teljesülhetnek, ha

vagy

l)Határozza meg az paraméter értékeit, hogy az egyenletrendszer megoldásaira: teljesüljön!

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza az -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó meghatározásáért:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására:

Mivel a zárt alakra hozott tört számlálója teljes négyzet, amely bármely valós érték esetén nemnegtatív, ezért ez a tört akkor lesz pozitív, ha a nevező pozitív, így:

Zérushelyek:

Táblázat:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Az egyenlőtlenség megoldása, a kérdezett reláció akkor teljesül, ha vagy

m)Határozza meg az összes olyan egész értékét, hogy az egyenletrendszer gyökeire: teljesüljön!

A megoldáshoz alkalmazzunk most determinánsokat:

Az eredeti együthatókból képzett determináns és annak értéke:

Az változóhoz tartozó determináns és annak értéke:

Tehát

Az változóhoz tartozó determináns és annak értéke:

Tehát

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására:

A feladat szövegének értelmében teljesül, tehát:

Tehát együttesen vizsgálva adódik: amely feltételnek az egészek tesznek eleget.

Ha a feltételből adódó összefüggésből alkalmazzuk:

Tehát együttesen vizsgálva adódik: amely feltételnek az egészek tesznek eleget.

Mivel az változókra különböző értékeket kaptunk így esetvizsgálat szükséges:

1.eset: és ekkor az egyenletrendszer megoldásaira megtett feltételt vizsgálva, adódik

Ez ellentmondás, mert különböző megoldások adódnak.

2.eset: és ekkor az egyenletrendszer megoldásaira megtett feltételt vizsgálva, adódik

Ez ellentmondás, mert különböző megoldások adódnak.

3.eset: és ekkor az egyenletrendszer megoldásaira megtett feltételt vizsgálva, adódik

Ez megfelelő, ekkor így ha és

4.eset: és ekkor az egyenletrendszer megoldásaira megtett feltételt vizsgálva, adódik

Ez ellentmondás, mert különböző megoldások adódnak.

5.eset: és ekkor az egyenletrendszer megoldásaira megtett feltételt vizsgálva, adódik

Ez ellentmondás, mert különböző megoldások adódnak.

6.eset: és ekkor az egyenletrendszer megoldásaira megtett feltételt vizsgálva, adódik

Ez ellentmondás, mert különböző megoldások adódnak.

n)---

Fejezzük ki például az -es összefüggésből az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy ebből adódik:

Helyettesítsünk vissza az kifejezéséért:

o)---

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

p)---

Alaphalmaz vizsgálat:

Szorozzuk az összefüggéseket a nevezők legkisebb közös többszörösével:

Fejezzük ki például a -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza az -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy amelyből és adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

q)---

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből

Szorozzuk az összefüggéseket a nevezők legkisebb közös többszörösével:

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

r)Igaz-e, hogy az egyenletrendszer megoldásai egymás reciprokai?

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Ha feltesszük, hogy amelyből adódik:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

A feladat szövegében szereplő kérdésre a válasz: igen, az egyenletrendszer megoldásai egymás reciprokai.

s)---

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Ha feltesszük, hogy amelyből adódik:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy amely minden valós paraméterértékek esetén teljesülnek, adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

t)---

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza az -es összefüggésbe:

Ha feltesszük, hogy amelyből adódik:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

u)Határozza meg azon paraméterértékeket, amelyekre az egyenletrendszer megoldásai azonos előjelűek!

Fejezzük ki például az -es összefüggésből például az változót:

Helyettesítsünk vissza a -es összefüggésbe:

Helyettesítsünk vissza az változó értékéért:

Térjünk rá a feltett kérdés megválaszolására: mivel a megoldások ellentétes előjelűek, ezért kizárólag az paraméterérték esetén egyezhet meg a megoldások előjele, minden további valós szám esetén éppen ellentétes előjelűel.

Másodfokú paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek:

Másodfokú paraméteres egyenletek/egyenlőtlenségek megoldásakor leggyakrabban a megoldások számára vonatkozó kérdést tesz fel a feladat szövege, amelynek megválaszolásához a diszkriminánk-tételt kell alkalmazzuk, amely szerint:

Az főegyütthatójú csökkenő hatvány szerint nullára rendezett másodfokú egyenletre alkalmazott megoldó képlet esetén, a gyökjel alatti kifejezés előjele dönt a valós megoldásokról:

Ha akkor a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása;

Ha akkor a másodfokú egyenletnek két egyenlő valós megoldása van, úgynevezett teljes négyzet;

Ha akkor a másodfokú egyenletnek két különböző valós megoldása van.

A feladatok szövege sok esetben közvetetten utalhat az esetleges többszörös gyökökre vagy ismétlődő gyökökre.

Ilyen lehet például, ha (többes számban) gyökökről tesz említést vagy legalább egy gyököt említ vagy ha csak általánosan a gyök létezésére kérdez rá. Ekkor a megegyező és a különböző gyökök esete is előfordulhat, tehát a diszkriminánsra nemnegatív feltételvizsgálatot teszünk.

Előfordulhatnak a paraméteres másodfokú egyenletek esetén olyan kérdések is, amelyek megválaszolásához a Viéte-formulákat kell alkalmazzuk, ezek: . Valamint olyan is lehetséges, amelynél a Viéte-formula alkalmazás is csak részeredmény lesz.

Fontos megjegyezni, hogy a másodfokú egyenlet megoldó-képlete, a diszkrimináns-tétel is és a Viéte-formulák is kizárólag a csökkenő hatvány szerint nullára rendezett egyenletre alkalmazható, annak kiolvasott együtthatóival. Valamint azt, hogy ha a főegyüttható változót tartalmazó összegzés, akkor nem nulla feltételvizsgálat szükséges, különben nem másodfokú az egyenlet.

7.Feladat: Oldja meg a paraméteres egyenletet!

a)Írja fel az egyenlet gyökeit a paraméter felhasználásával!

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Együtthatók:

Tehát az egyenlet gyökei:

á)A paraméter mely értékeire van az egyenletnek valós gyöke?

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok esetén teljesül:

b)Az paraméter mely értékeire lesz az egyenletnek két különböző gyöke?

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz két különböző valós gyöke, ha diszkriminánsa pozitív előjelű.

Együtthatók:

c)Van-e olyan paraméterérték, amelyre az egyenletnek nincs valós gyöke?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: a kérdezett relációnak eleget tevő valós szám nem létezik, mert a zérushelyre illeszkedő felfelé nyíló parabola esetén az sohasem vesz fel negatív értéket a függvény.

cs)Az paraméter mely valós értékeire lesz az egyenletnek két pozitív gyöke?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökök pozitivitását a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk, ugyanis ekkor a gyökök összege is és szorzata is pozitív kell legyen:

A kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok esetén teljesül:

Az összes feltételnek egyidejűleg eleget tevő, a feladat megoldása:

d)Van-e olyan paraméterérték, amelyre az egyenletnek nincs valós gyöke?

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: a kérdezett relációnak eleget tevő valós szám nem létezik, mert a zérushelyre illeszkedő felfelé nyíló parabola esetén az sohasem vesz fel negatív értéket a függvény.

e)A paraméterérték mely valós értékeire lesz az egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke?

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz legfeljebb egy valós gyöke, ha diszkriminánsa nempozitív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a gyökök közötti valós számok esetén teljesül:

f)A paraméterérték mely valós értékeire lesz az egyenletnek legalább egy gyöke?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz legalább egy valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

g)Határozza meg az paraméterértéket úgy, hogy az egyenlet egyik gyöke a másiknak ellentettje! Melyek ezek a gyökök?

A feladat szövegének értelmében esetvizsgálat szükséges.

1.eset: a gyökök -tól különböző valós számok.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz két különböző valós gyöke, ha diszkriminánsa pozitív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Mivel ennek a másodfokú kifejezésnek nincs valós gyöke, tehát (a pozitív főegyüttható miatt) az általa meghatározott felfelé nyíló parabola teljes értelmezési tartományán a vízszintes tengely felett van, így a kérdezett reláció minden valós szám esetén teljesül. Ha a gyökök ellentétes előjelűek, akkor a Viéte-formulák értelmében az összegük .

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

2.eset: mindkettő gyök .

Abban az esetben lesz valamely másodfokú egyenletnek a kétszeres gyöke, ha nincs benne az -es és nincs benne -es tagtól független konstans, tehát:

Amely azonban ellentmondásra vezet.

h)A valós paraméter mely értékénél lesz az egyenletben a gyökök négyzetösszege minimális? Mennyi ez az összeg?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: a kérdezett relációnak eleget tesz minden valós szám, mert a zérushelyre illeszkedő felfelé nyíló parabola esetén az minden esetben nemnegatív.

A gyökök négyzetösszegére vonatkozó értéket a Viéte-formulákkal tudjuk becsülni:

Együtthatók:

Mivel ennek a másodfokú kifejezésnek nincs valós gyöke, tehát (a pozitív főegyüttható miatt) az általa meghatározott felfelé nyíló parabola teljes értelmezési tartományán a vízszintes tengely felett van, így a kérdezett reláció minden valós szám esetén teljesül. Ennek a felfelé nyíló parabolának a minimum típusú szélsőérték helyét vagy teljes négyzetté alakítással, vagy a szélsőérték helyre vonatkozó zárt képlet alkalmazásával határozhatjuk meg. Legyen az utóbbi. Tetszőleges másodfokú függvény szélsőértékének helyét összefüggés adja meg:

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett összeg:

i)A paraméter mely értéke esetén lesz az egyenlet gyökeinek négyzetösszege minimális? Mennyi ez az összeg?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a gyökök közötti valós számok esetén teljesül:

A gyökök négyzetösszegére vonatkozó értéket a Viéte-formulákkal tudjuk becsülni:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Ennek a felfelé nyíló parabolának a minimum típusú szélsőérték helyét vagy teljes négyzetté alakítással, vagy a szélsőérték helyre vonatkozó zárt képlet alkalmazásával határozhatjuk meg. Legyen az utóbbi. Tetszőleges másodfokú függvény szélsőértékének helyét összefüggés adja meg:

Ellenőrizzünk helyettesítéssel:

j)Határozza meg értékét úgy, hogy az egyenlet egyik gyöke a másik gyök kétszerese legyen!

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így nem lehetséges, hogy az „egyik” gyöke kétszerese legyen a „másik” gyöknek, mert az elsőfokú egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet.

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

A feladat szövegének értelmében esetvizsgálat szükséges.

1.eset: a gyökök -tól különböző valós számok.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok esetén teljesül:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk, legyen ekkor

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

2.eset: mindkettő gyök .

Abban az esetben lesz valamely másodfokú egyenletnek a kétszeres gyöke, ha nincs benne az -es és nincs benne -es tagtól független konstans, tehát:

Amely azonban ellentmondásra vezet.

k)Határozza meg paraméter értékét, ha az egyenlet gyökei: !

A gyökök ismeretében, azokat behelyettesítve azonosság adódik, tehát

1.eset: esetén

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

2.eset: esetén

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

Tehát a különböző esetekben kapott közös érték, azaz érték tesz eleget a feladat feltételeinek, ellenőrizzük vissza:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

l)Az paraméter mely értékeire lesz az egyenlet gyökeinek négyzetösszege ?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok esetén teljesül:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk, ekkor:

Ennek gyökei: illetve amely gyökök eleget tesznek az előzőleg megállapított feltételek valamelyikének, ellenőrizzük:

1.eset:

Együtthatók:

1.eset:

Együtthatók:

ly)Határozza meg értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeire teljesüljön!

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Amely minden valós szám esetén teljesül.

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk, ekkor:

Ennek gyökei: illetve amely gyökök eleget tesznek az előzőleg megállapított feltételnek, ellenőrizzük most a tényleges gyökök meghatározásával:

1.eset:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

1.eset:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

m)Határozza meg az paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeire teljesüljön!

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk ekkor

Amely kapott érték eleget tesz az előzőleg megállapított feltételnek.

n)A valós paraméterérték mely értékére lesz az egyenlet gyökeinek abszolútértéke megegyező?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb valós számok esetén teljesül:

A feladat szövegének értelmében esetvizsgálat szükséges.

1.eset: a gyökök -tól különböző valós számok. Ezen belül szintén esetvizsgálat szükséges.

1/A.eset: a gyökök -tól különböző, ellentétes előjelű valós számok

Amely érték eleget tesz a korábban kapott feltételek egyikének, így ellenőrzéssel meggyőződhetünk a feladat szövegének teljesüléséről:

1/B.eset: a gyökök -tól különböző, megegyező valós számok

Ennek gyökei: illetve

Amely értékek eleget tesznek a korábban kapott feltételek egyikének, így ellenőrzéssel meggyőződhetünk a feladat szövegének teljesüléséről:

Ha akkor

Együtthatók:

Ennek gyökei:

Ha akkor

Együtthatók:

Ennek gyökei:

2.eset: mindkettő gyök .

Amely érték már korábban tárgyalásra került és itt irreleváns, hiszen ez az érték a 0-tól különböző ellentétes előjelű megoldásokat szolgáltatta.

Ennek gyökei: illetve . Mivel különböző értékek adódnak, így levonható a következtetés: nem létezik olyan paraméter-érték, amelyre a 0 megjelenne kétszeres gyökként.

Megjegyzés: a megoldás másik lehetősége lett volna, ha azt használjuk ki, hogy a 0, mint kétszeres gyök azt jelenti, hogy a megadott másodfokú egyenlet olyan hiányos másodfokú egyenlet, amelyben kizárólag négyzetes tag van, tehát az elsőfokú tag és független konstans értékekből álló összegzést kinullázzuk, tehát:

amelyből a megfelelő átalakításokkal a változóra történő rendezés után adódik:

Innen pedig a 0 kétszeres gyök értelmében adódik a vizsgálandó lehetőség: .

ny)Létezhet-e olyan valós paraméter-érték, amelyre a megadott másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke?

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Abban az esetben nincs valós megoldása az egyenletnek, ha diszkriminánsa negatív előjelű.

Együtthatók:

Amely ellentmondás, tehát nincs olyan paraméter-érték, amelyre ne lenne megoldás, vagyis bármely valós paraméter-érték esetén lesz megoldása az egyenletnek.

o)Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet!

Alaphalmaz vizsgálat: és amelyből és amelyből

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

p)Határozza meg az egyenlet megoldásait, ha paraméterek racionális számok!

Alaphalmaz vizsgálat: amelyből vagyis illetve .

Szorozzunk a nevezőkben lévő kifejezések legkisebb közös többszörösével:

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Együtthatók:

q)A paraméter mely értékeire lesz valós gyöke az egyenletnek?

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Ebből amely valós megoldás.

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

A kapott paraméterértékek esetén a másodfokú egyenletnek lesz valós gyöke, mégpedig két különböző gyöke, egyetlen kivétel ez alól a érték, ugyanis ekkor csak pontosan egy megoldása lesz az egyenletnek.

r)Létezik-e olyan paraméterérték, amelyre az egyenletnek két egybeeső gyöke van?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz két egybeeső valós gyöke, ha diszkriminánsa értékű.

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve mint lehetséges gyökök, ellenőrizzük a kapott megoldásokat:

1.eset:

A kapott másodfokú egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása, mert a gyökjel alatt negatív érték adódik.

1.eset:

A kapott másodfokú egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása, mert a gyökjel alatt negatív érték adódik, tehát levonható a következtetés, nincs olyan valós szám értékű paraméterérték, amelyre az egyenletnek két egybeeső gyöke/megoldása/zérushelye lenne.

s) Létezik-e olyan paraméterérték, amelyre az egyenletnek két egybeeső gyöke van?

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Ebből ám mert az egyenlet elsőfokú, így nem teljesül a két egybeeső gyök feltétel.

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz két egybeeső valós gyöke, ha diszkriminánsa értékű.

Együtthatók:

Ebből amelyre ellenőzünk:

Ennek az egyenletnek megoldása: amely valóban eleget tesz a feladat feltételeinek.

sz) Létezik-e olyan paraméterérték, amelyre az egyenletnek két egybeeső gyöke van?

Végezzük el a lehetséges átalakítások és rendezzünk csökkenő hatvány szerint -ra.

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Ennek megoldása: ám ez egy elsőfokú egyenlet gyöke.

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor lesz két egybeeső valós gyöke, ha diszkriminánsa értékű.

Együtthatók:

Ennek gyökei illetve ellenőrizzünk a kapott megoldásokra:

1.eset:

Ennek az egyenletnek megoldása amely teljesíti a kért feltételt.

1.eset:

Ennek az egyenletnek megoldása amely teljesíti a kért feltételt.

t)Határozza meg a paraméter valós értékét úgy, hogy az egyenletnek két pozitív előjelű gyöke legyen!

Ha ebből ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Ennek megoldása de ez egy elsőfokú egyenlet egyetlen megoldása.

Különben, ha ebből ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ennek megoldásai illetve a kért reláció pedig a felfelé nyíló parabola esetén a gyökök közötti értékek esetén teljesül, így a megoldáshalmaz: .

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk ekkor:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása: vagy .

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása: vagy .

A kapott megoldáshalmazok közös részét vagy összevetve a diszkriminánsra vonatkozó feltétel-vizsgálattal, adódik a megoldáshalmaz:

ty)A valós paraméter mely értéke esetén teljesül az feltétel?

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk ekkor:

Ennek az egyenletnek megoldásai illetve

Ebből az utóbbi feltételből amelyből tehát

1.eset: ha akkor így

2.eset: ha akkor így

u)Adja meg azokat a valós paraméterértékeket, amelyekre az egyenlet gyökei nagyobbak, mint !

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ennek megoldásai illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a gyökök közötti valós számok esetén teljesül:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk ekkor:

A gyökök szorzatára vonatkozó feltétellel nem szűrjük a lehetséges számhalmazt, hiszen a megadott feltételnek eleget tevő gyökök szorzata tetszőleges nagyságrendű értékeket felvehet.

A korábbi feltételek együttesen akkor teljesülhetnek, ha

v)Határozza meg a paraméterértékek lehetséges halmazát, amelyre az egyenlet gyökeire teljesül!

Ha ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Ennek megoldása tehát ez egy elsőfokú egyenlet egyetlen gyöke és nem lehet két megoldása.

Különben, ha ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű, azonban könnyen ellenőrizhető, hogy a feladat szövegében megadott feltétel megegyező gyökök esetén nem teljesül, ezért csak a két különböző megoldás esetét vizsgáljuk.

Együtthatók:

Ennek megoldásai illetve a kérdezett relációnak eleget tevő valós számok, a felfelé nyíló parabola esetén a gyökök közötti valós számok esetén teljesül: és .

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk ekkor:

A számlálóban lévő két tagú különbség visszavezetése Viéte formuláira:

Visszatérve a megoldandó egyenlőtlenségekre:

A gyökös mennyiség értelmezési tartományába tartozó értékek esetén pozitív, amelyek négyzetgyöke is pozitív, a nevező akár pozitív, akár negatív a hányados előjele pozitív lesz, ha annak abszolútértékét kell vennünk:

1.eset: a nevezőben lévő paraméter negatív, tehát: ekkor a tört számlálójának is negatívnak kell lennie:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása a feltételezett tartományban:

2.eset: a nevezőben lévő paraméter pozitív, tehát: ekkor a tört számlálójának is pozitívnak kell lennie:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása a feltételezett tartományban:

A lehetséges megoldáshalmazok között „vagy” kötőszó értendő.

w)Határozza meg a paraméterértékek lehetséges halmazát, amelyre az egyenlet gyökeire teljesül!

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű:

Együtthatók:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk ekkor:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása: vagy amelyből az utóbbi feltétet kizárhatjuk, így .

z)A valós paraméter mely értékei esetén lesznek az egyenlet gyökei a intevallumban?

Ha ekkor az egyenlet elsőfokú, így a megoldandó egyenlet:

Különben, ha ekkor az egyenlet másodfokú.

Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ez a feltétel pedig tetszőleges paraméter-érték esetén teljesül, hiszen a bal oldal teljes négyzet alakú. A gyökök:

Az gyök érték esetén akkor teljesíti a feltételt, ha vagy

Az gyök akkor teljesíti a feltételt, ha

Vagyis a feltételek együttes vizsgálatával adódik: vagy

8.Feladat:

a)Az valós paraméter mely értékére lesz bármely valós -re:

Ha amelyből akkor az egyenlőtlenség elsőfokú:

Ha amelyből akkor az egyenlőtlenség másodfokú. Ekkor használjuk fel, hogy valamely másodfokú függvény grafikonja akkor teljesíthet „” feltételt minden valós -re feltételt: ha egyrészt a parabola felfelé nyílik, ez pozitív főegyüttható esetén következik be, tehát amelyből ; másrészt akkor teljesülhet a feltétel, ha a felfelé nyíló parabolának nincs közös pontja a vízszintes tengellyel (nincs megoldása), vagyis diszkriminánsa negatív:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb értékek esetén teljesül, tehát: vagy . Az első feltétel kizárható, így .

b)Az valós paraméter mely értékei esetén lesznek a

polinom bármely valós számhoz tartozó helyettesítési értékei pozitív számok?

A megadott, pozitív főegyütthatós másodfokú polinom akkor lesz mindig pozitív, ha a felfelé nyíló parabolának nincs közös pontja a vízszintes tengellyel (nincs megoldása), vagyis diszkriminánsa negatív:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a gyökök közötti valós értékek esetén teljesül, tehát

c)Határozza meg a valós paraméter értékét úgy, hogy a

polinom bármely valós számhoz tartozó helyettesítési értékei negatív számok legyenek!

Ha amelyből akkor a polinom elsőfokú:

amely negatív, ha amelyből

Tehát ebben az esetben nem teljesül, hogy minden valós számhoz tartozó helyettesítési érték negatív szám lenne.

Ha amelyből akkor a polinom másodfokú. Ekkor használjuk fel, hogy valamely másodfokú függvény grafikonja akkor teljesíthet „” feltételt minden valós -re feltételt: ha egyrészt a parabola lefelé nyílik, ez negatív főegyüttható esetén következik be, tehát amelyből ; másrészt akkor teljesülhet a feltétel, ha a lefelé nyíló parabolának nincs közös pontja a vízszintes tengellyel (nincs megoldása), vagyis diszkriminánsa negatív:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb értékek esetén teljesül, tehát: vagy . Az összes feltétel együtt eetben teljesül.

d)Az valós paraméter mely értékei esetén lesznek a

polinom bármely valós számhoz tartozó helyettesítési értékei negatív számok?

Ha amelyből akkor a polinom elsőfokú:

amely negatív, ha amelyből

Tehát ebben az esetben nem teljesül, hogy minden valós számhoz tartozó helyettesítési érték negatív szám lenne.

Ha amelyből akkor a polinom másodfokú. Ekkor használjuk fel, hogy valamely másodfokú függvény grafikonja akkor teljesíthet „” feltételt minden valós -re feltételt: ha egyrészt a parabola lefelé nyílik, ez negatív főegyüttható esetén következik be, tehát amelyből ; másrészt akkor teljesülhet a feltétel, ha a lefelé nyíló parabolának nincs közös pontja a vízszintes tengellyel (nincs megoldása), vagyis diszkriminánsa negatív:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a kisebbik gyöktől kisebb vagy a nagyobbik gyöktől nagyobb értékek esetén teljesül, tehát: vagy . Az összes feltétel együtt eetben teljesül.

e)Adott egy tört, amelynek számlálója , nevezője ahol és egész érték. Ha a számlálóhoz is és a nevezőhöz is hozzáadunk -t, akkor a tört értéke nagyobb lesz, mint . Ha a számlálóból is és a nevezőből is kivonunk -at, akkor a tört értéke pozitív marad, de kisebb lesz, mint . Melyik ez a tört?

1.feltétel:

Mivel a nevezőben lévő tehát pozitív, ezért szorozhatunk a közös többszörössel:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a gyökök közötti valós értékek esetén teljesül, tehát

2.feltétel:

Ebből egyrészt amely egyenlőtlenség megoldása

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

amelyből vagy esetén teljesül.

Illetve másrészt

Mivel a közös nevezőre hozás után a számlálóban kapott másodfokú kifejezésnek nincs valós gyöke, minden valós értékre negatív előjelű értéket vesz fel, vagyis a tört akkor lesz negatív, ha a nevező pozitív tehát:

Az összes feltétel együttesen teljesül vagy . Mivel egész értékeket keresünk, ezért

f)A valós paraméter mely értékeire lesz igaz, hogy a

egyenlőtlenség minden valós szám esetén teljesül?

A nevezőben lévő másodfokú kifejezés minden valós számra negatív előjelű helyettesítési értéket ad vissza, mert nincs valós gyöke. Egyik megoldandó egyenlőtlenség:

Mivel a tört nevezője negatív, ezért a teljes tört akkor lesz pozitív, ha a számláló negatív:

A lefelé nyíló parabola akkor lehet negatív előjelű, ha nincs valós gyöke, tehát diszkriminánsa negatív

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a gyökök közötti valós értékek esetén teljesül, tehát

Másik megoldandó egyenlőtlenség:

Mivel a tört nevezője negatív, ezért a teljes tört akkor lesz negatív, ha a számláló pozitív:

A felfelé nyíló parabola akkor lehet pozitív előjelű, ha nincs valós gyöke, tehát diszkriminánsa negatív

Együtthatók:

Együtthatók:

Ennek gyökei: illetve

A felfelé nyíló parabola esetén a kérdezett reláció a gyökök közötti valós értékek esetén teljesül, tehát

Az összes feltétel együttesen teljesül, ha

g)Mennyinek válasszuk a valós paramétert, hogy a

másodfokú egyenlet mindkét gyöke pozitív legyen?

Ha amelyből akkor az egyenlet elsőfokú:

Nem teljesül, hogy az egyenletnek két gyöke lenne, igaz, hogy az az egy, ami van az pozitív.

Ha amelyből akkor az egyenlet másodfokú. Tetszőleges másodfokú egyenletnek a diszkrimináns-tétel értelmében akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív előjelű.

Együtthatók:

Ezzel a feltétellel még csak azt biztosítottuk, hogy az egyenletnek van legalább egy megoldása. A gyökökre vonatkozó feltételt a Viéte-formulák felhasználásával biztosíthatjuk. Ha mindkét gyöknek pozitívnak kell lennie, akkor az összegük és szorzatuk is pozitív előjelű:

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása: vagy

Ennek az egyenlőtlenségnek megoldása: vagy

Az összes feltételt együttesen teljesíti.

h)Oldja meg -re a következő paraméteres egyenlőtlenségeket!

Egy felfelé nyíló parabola az esetleges gyökei között lehet negatív, ekkor diszkriminánsa pozitív

Együtthatók:

Ez az egyenlőtlenség feltétel esetén mindig teljesül. A bal oldali kifejezés megoldásai:

Ennek gyökei: illetve . Ha akkor az egyenlőtlenség megoldása: ha pedig akkor az egyenlőtlenség megoldása . Összefoglalva a kettőt frappánsan írhatjuk: .

i)

ahol pozitív valós érték és

Vegyük észre, hogy az után lévő független paraméterekből álló összegzés szorzattá alakítható, mert egy teljes négyzet:

Az előző feladat alapján, ekkor a megoldás:

j)

ahol pozitív valós számok.

Végezzük el a lehetséges műveleteket:

Az előző feladat alapján, ekkor a megoldás: amelyből

k)

ahol pozitív valós szám.

Végezzük el a lehetséges műveleteket:

A bal oldali, felfelé nyíló hiányos másodfokú paraméteres parabola az esetleges gyökök között negatív, ehhez a diszkriminánsnak pozitívnak kell lennie.

Együtthatók:

Ez az egyenlőtlenség feltétel esetén mindig teljesül. A bal oldali kifejezés megoldásai:

Ennek gyökei: illetve . Ha akkor az egyenlőtlenség megoldása: ha pedig akkor az egyenlőtlenség megoldása .

l)

ahol pozitív valós számok és

A tört értelmezés szerint a nevezőben lévő változót tartalmazó összegzés nem lehet nulla amelyből

A számláló zérushelyei: a nevező zérushelye lenne .

A megoldandó egyenlőtlenségben szereplő paraméterek nagyságrendje szerinti esetvizsgálat szükséges.

1.eset: vagy esetén a zérushelyek növekvő sorrendű elhelyezkedése a számegyenesen:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ekkor az egyenlőtlenség megoldása: vagy

2.eset: esetén a zérushelyek növekvő sorrendű elhelyezkedése a számegyenesen:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ekkor az egyenlőtlenség megoldása: vagy

Előfordulhat, hogy a megoldandó paraméteres másodfokú egyenlet gyökös alakban kerül kitűzésre

9.Feladat: Oldja meg az egyenleteket!

a)

ahol egy 0-tól különböző valós érték.

A tört értelmezés szerint: illetve valamint a négyzetgyök értelmezés szerint nemnegatív alaphalmaz feltétel-vizsgálat szükséges:

A számláló zérushelye: a nevező zérushelye lenne .

Ha akkor a zérushelyek növekvő sorrendű elhelyezkedése a számegyenesen: így az egyenlőtlenség megoldása: vagy .

Ha akkor a zérushelyek növekvő sorrendű elhelyezkedése a számegyenesen: így az egyenlőtlenség megoldása: vagy .

Ha akkor szorzás után a megoldandó egyenlőtlenség:

Ha akkor szorzás után a megoldandó egyenlőtlenség:

Tehát az alaphalmaz-vizsgálat összesítése: ha akkor ha pedig akkor .

Mivel a megoldandó egyenlet négyzetgyökös mennyiségeket tartalmaz, ezért annak ellentett műveletét, a négyzetre emelést kell alkalmazzuk és az is bizonyos, hogy kétszer is:

Az újabb négyzetre emelés előtt érdemes az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot kiegészíteni. A korábbiak szerint az egyenlet bal oldala nemnegatív, a jobb oldalon pedig hivatkozhatunk arra, hogy egy szám és annak reciprokának összege szerepel (amely mindig legalább értékű), vagyis ha csökkentjük -gyel, akkor még mindig pozitív.)

Együtthatók:

Ha a diszkriminánsát vizsgáljuk: erről bizonyosan állíthatjuk, hogy ha akkor ez mindig pozitív, tehát két különböző megoldása van a másodfokú egyenletnek:

Ennek gyökei: illetve

A megoldások közül az első teljesíti az alaphalmaz feltételeket, a második éppen ellentmond annak.

b)

ahol pozitív.

A tört értelmezés szerint: amelyből illetve a négyzetgyök értelmezés szerint: amelyből valamint amely az előző megállapítás értelmében biztosan teljesül (mert a számláló biztosan pozitív), továbbá amelyből . Az összes feltétel egyidejűleg esetben teljesül.

Mivel a megoldandó egyenlet négyzetgyökös mennyiségeket tartalmaz, ezért annak ellentett műveletét, a négyzetre emelést kell alkalmazzuk és az is bizonyos, hogy kétszer is:

A feladat szövegének értelmében, mivel a paraméter pozitív, ezért előjelváltás nélkül egyszerűsíthetek vele:

Amely megoldás ellentmond az alaphalmaz feltételnek, tehát nincs megoldás.

c)

ahol egy 0-tól különböző valós szám.

A tört értelmezés szerint: amely akkor lehetne nulla értékű, ha az összeg mindkét tagja egyidejűleg nulla értékű, ez viszont kizárólag esetben következne be, amely a megadott feltétel értelmében lehetetlen. A négyzetgyök értelmezés szerint: amelyből illetve amelyből

Az alaphalmaz feltételvizsgálat összesítése: ha akkor ha akkor .

Az egyenlet mindkét oldalán közvetlen kiemeléssel alakítsunk szorzattá:

A jobb oldalon a négyzetgyökvonás első azonossága értelmében a kéttényezős szorzat közös gyökjel alá hozható, amely után alkalmazva az ugyanazon két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó nevezetes azonosságot, azt kell észrevegyük, hogy a gyökjel alatt megjelenő mennyiség kialakítható az egyenlet bal oldalán is, ezért kiemelünk egy -es szorzót:

Rendezzünk egy oldalra, hogy közvetlen kiemeléssel szorzattá tudjunk alakítani:

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamelyik szorzótényező nulla értékű.

1.eset:

2.eset:

A négyzetre emelés előtt érdemes kiegészíteni az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot. A bal oldali gyökjel alatti mennyiség a korábbiak alapján nemnegatív, a jobb oldali zárójeles szintén nemnegatív, tehát a akkor teljesülhet egyenlőség, ha az negatív.

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamely tényező nulla értékű. A feladat megadott utasítása értelmében az első tényező nem lehet nulla, így:

Ez viszont ellentmondás, mert a jobb oldal negatív előjelű és a két mennyiség között sohasem teljesülhet egyenlőség.

d)

ahol tetszőleges valós számok.

A tört értelmezés szerint: amelyből tehát valamint amelyből tehát

továbbá a négyzetgyök értelmezés szerint:

A számláló zérushelye: a nevező zérushelye lenne

Ha akkor a zérushelyek növekedő sorrendje a számegyenesen: így az egyenlőtlenség megoldása:

Ha akkor a zérushelyek növekedő sorrendje a számegyenesen: így az egyenlőtlenség megoldása:

Szorozzuk meg az egyenletet -gyel, ekkor:

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát: közös nevezővel:

A visszamaradó egyenletben mindegyik tag tartalmazza az változót. Teszteljük, lehetséges-e az megoldás, azt látjuk, hogy ez ellentmondásra vezet (nem lehet megoldása az egyenletnek), tehát egyszerűsíthetünk vele:

Az így kapott megoldás esetén a négyzetgyök értelmezés miatt teljesülő feltétel:

Ha akkor a nevező pozitív, tehát a számlálónak nemnegatívnak kell lennie, hogy a tört nemnegatív legyen:

Ha akkor a nevező negatív, tehát a számlálónak nempozitívnak kell lennie, hogy a tört nemnegatív legyen:

e)

ahol tetszőleges pozitív valós szám.

A tört értelmezés szerint amely nem lehet nulla, ha a paraméter pozitív, így az összeg mindkét tagja egyidejűleg nemnegatív, valamint amelyből tehát így . Továbbá a négyzetgyök értelmezése szerint: amelyből és amelyből

Az alaphalmaz feltétel-vizsgálat összesített megoldása: .

Szorozzunk a közös nevezővel:

Mivel a visszamaradó egyenlet mindegyik tagja tartalmazza mennyiséget és mert a paraméter pozitív, ezért előjelváltás nélkül egyszerűsíthetünk vele:

Az újabb négyzetre emelés előtt érdemes kiegészíteni az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot. A jobb oldali gyökös kifejezés a korábbiak alapján nemnegatív, tehát a jobb oldali második szorzótényező is nemnegatív. Ezért az egyenlet bal oldala is nemnegatív előjelű kell legyen, tehát: amelyből . A feladat szövege értelmében a paraméter pozitív, ezért amelyből tehát így vagy

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű,ha valamelyik tényező nulla.

1.eset: amelyből visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

A jobb oldali tört nevezője nullázódik, amely nem lehetséges, tehát ez egy hamis gyök.

2.eset: amelyből tehát

Ellenőrzés:

Bal oldal:

Jobb oldal:

Az lehetséges tulajdonképpen ugyanezen műveletsorok elvégzésére vezet.

f)

ahol tetszőleges valós szám.

A tört értelmezés szerint amelyből feltétel akkor lenne nulla, ha mindkét tag nulla, tehát értékből lehetséges megoldás adódik, amely ellentmondás, mert a nevező nulla lenne.

A gyök értelmezés szerint pedig tetszőleges, nullától különböző valós értékek esetén teljesül, mert a négyzetes tagok összege mindig pozitív.

Szorozzunk a jobb oldali tört nevezőjével:

A négyzetre emelés előtt érdemes kiegészíteni az alaphalmaz feltétel-vizsgálatot: amelyből

ez alapján tehát

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamelyik szorzótényező nulla. Mivel az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnál azt kaptuk, hogy a paraméter nem lehet nulla értékű, ezért:

1.eset: visszahelyettesítve az eredeti egyenlet bal- és jobb oldalán:

Bal oldal:

Jobb oldal:

Az lehetséges gyök visszahelyettesítése ehhez hasonlóan történik.

g)

ahol tetszőleges valós szám.

Mivel a gyökkitevő páratlan, ezért nincs szükség alaphalmaz feltétel-vizsgálatra. A köbgyök miatt harmadikra hatványozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

A bal oldali zárójelen belül megjelenik éppen az eredeti egyenlet bal oldala, amely helyére helyettesítsük vissza az eredeti egyenlet jobb oldalát:

A jobb oldali kéttényezős szorzat kizárólag akkor lehet nulla értékű, ha valamelyik szorzótényező nulla. Mivel az alaphalmaz feltétel-vizsgálatnál azt kaptuk, hogy a paraméter nem lehet nulla értékű, ezért:

1.eset: helyettesítsünk vissza az eredeti egyenletbe.

Azonosság adódik, tehát valóban tetszőleges valós paraméterérték esetén teljesül.

2.eset:

Helyettesítsünk vissza az eredeti egyenletbe.

Bal oldal:

Jobb oldal:

h)

ahol tetszőleges valós számok.

Mivel a gyökkitevő páratlan, ezért nincs szükség alaphalmaz feltétel-vizsgálatra. A köbgyök miatt harmadikra hatványozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

A bal oldalon közvetlen kiemeléssel alakítsunk szorzattá:

A bal oldali zárójelen belül megjelenik éppen az eredeti egyenlet bal oldala, amely helyére helyettesítsük vissza az eredeti egyenlet jobb oldalát:

Másodfokú paraméteres egyenletrendszer